

Sistemas dinâmicos: diferentes abordagens para um sistema massa-mola-amortecedor

Múltiplas possibilidades

Os produtos solidThinking® foram desenvolvidos para proporcionar a melhor experiência no projeto de sistemas multidisciplinares e possibilitar diferentes abordagens para tratar estes sistemas. Circuitos elétricos, mecânicos e de controle podem ser planejados e projetados através de modelos matemáticos, modelos baseados em sinais e/ou modelos baseados em componentes físicos. A fim de exemplificar estas diferentes abordagens, podemos estudar a resposta a um impulso de um sistema massa-mola-amortecedor utilizando cada um destes modelos.

Sistema físico

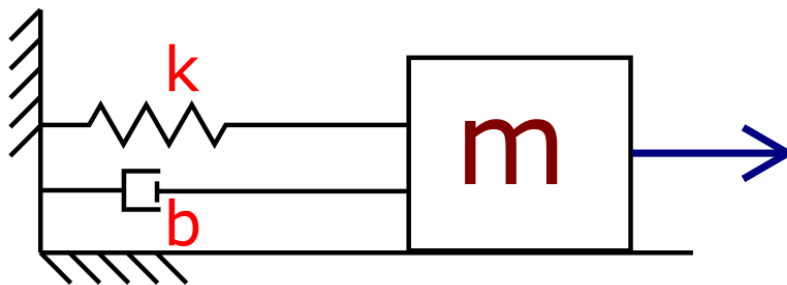


Figura 1: sistema massa-mola-amortecedor

O sistema estudado é um caso simples mostrado na Figura 1: sistema massa-mola-amortecedor. A este sistema deve ser aplicada uma força instantânea (um impulso) e deveremos observar a posição da massa para cada instante no tempo. O atrito é desprezado neste exemplo e o deslocamento é considerado a partir da posição de repouso, conforme mostrado na Figura 2.

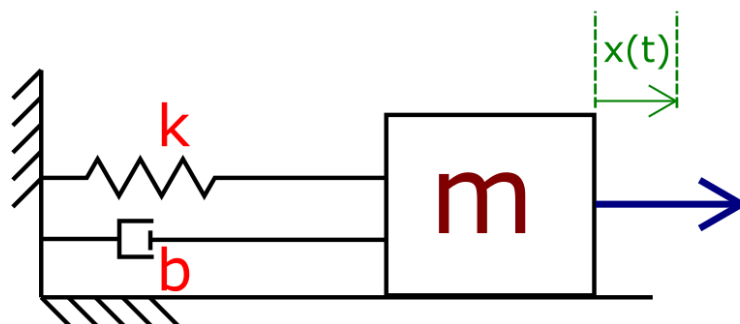


Figura 2: deslocamento do sistema massa-mola-amortecedor

Modelagem através de componentes físicos

Uma das formas de abordar este problema através das soluções solidThinking é utilizando blocos Modelica. A modelagem através de componentes físicos é feita de forma simples com os blocos nativos do Activate. A abordagem através deste modelo consiste basicamente em posicionar os elementos conforme o sistema físico e adicionar a força e os sensores. O diagrama completo é mostrado na Figura 3.

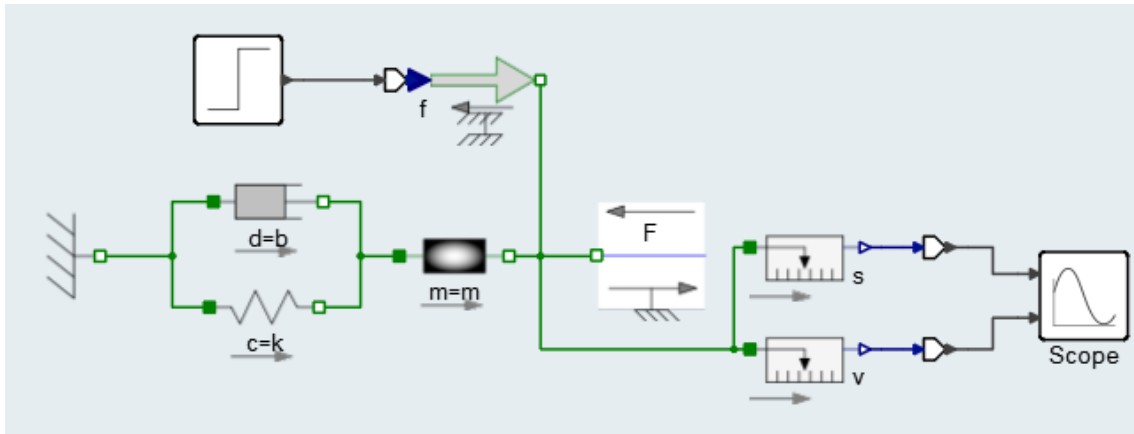


Figura 3: abordagem do sistema massa-mola-amortecedor através de componentes físicos

Os dados do problema podem ser inseridos em cada bloco diretamente ou podem ser identificados como variáveis que são definidas clicando no botão *Diagram* no menu superior, como pode ser visto na Figura 4.

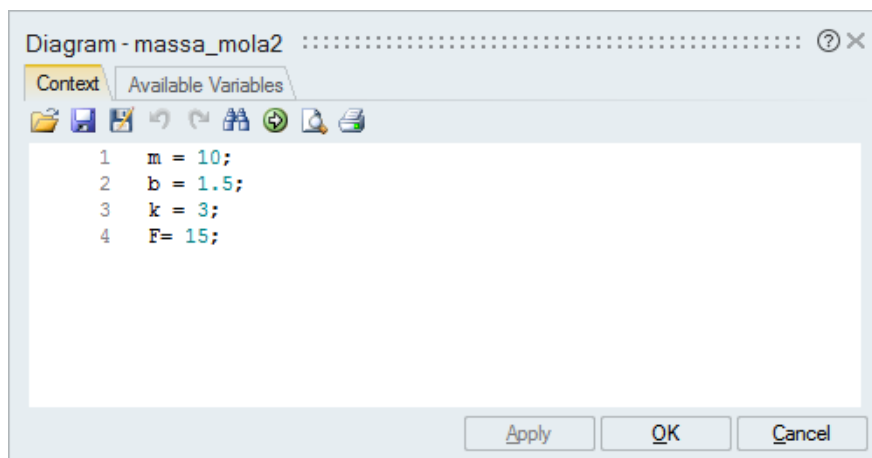


Figura 4: definição das variáveis do problema.

Uma das formas possíveis de criar um impulso no instante inicial do problema é mostrado na Figura 3: insere-se uma força constante no começo do problema e é aplicado um degrau com força contrária em um intervalo curto de tempo, idealmente igual ao passo de iteração definido para a simulação. Para verificar a resposta do sistema ao impulso foram inseridos os sensores de posição e velocidade. Os resultados podem ser verificados na Figura 5.

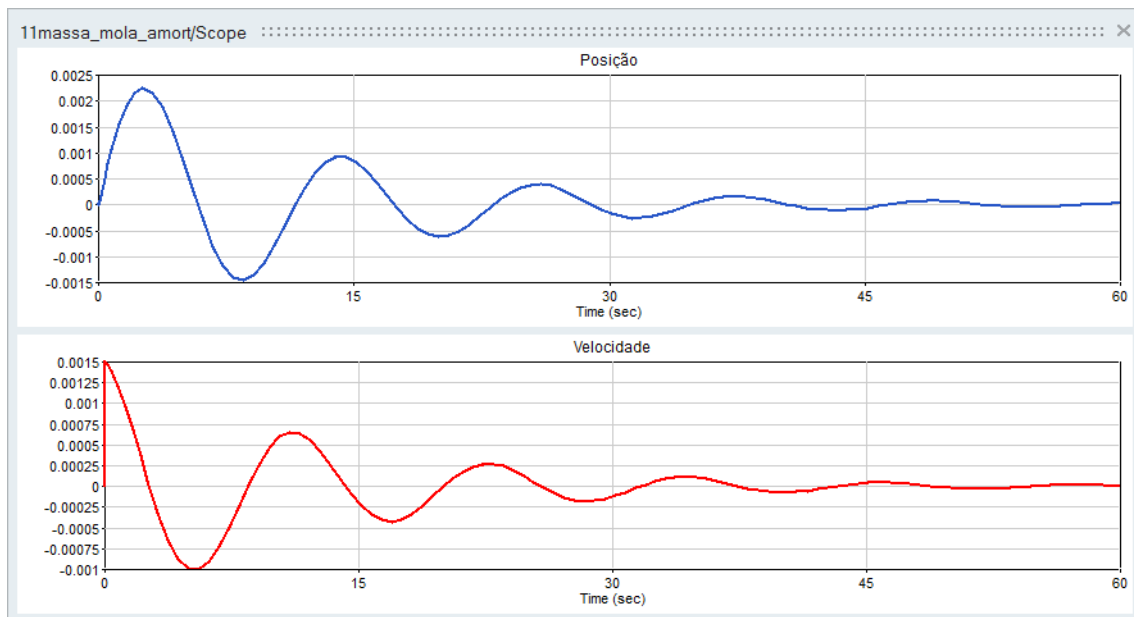


Figura 5: resultado da simulação da abordagem baseada em componentes físicos

Modelagem baseada em sinais

Uma outra abordagem possível é utilizando os blocos Activate e os modelos baseados em sinais. Para construir este segundo modelo, deve-se equacionar o problema através das leis de Newton, lembrando que a força da mola é proporcional ao deslocamento e a força do amortecedor é proporcional à velocidade.

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = f(t) - b\dot{x}(t) - kx(t)$$

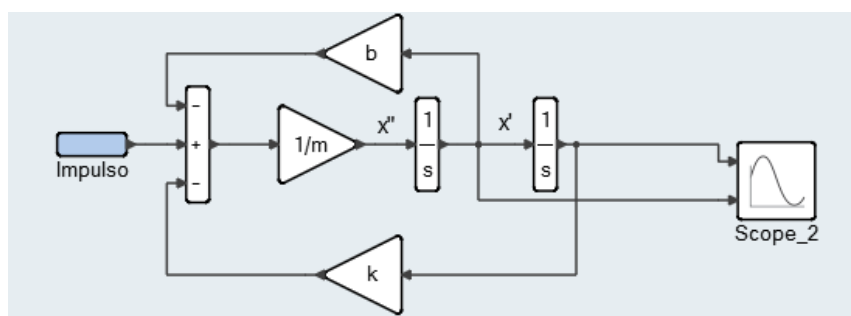


Figura 6: abordagem do sistema massa-mola-amortecedor através de sinais

A Figura 6 mostra o diagrama de blocos referente ao equacionamento da dinâmica do sistema. A função $f(t)$ é o também um impulso, como o utilizado no diagrama anterior, mas construída de uma forma distinta.

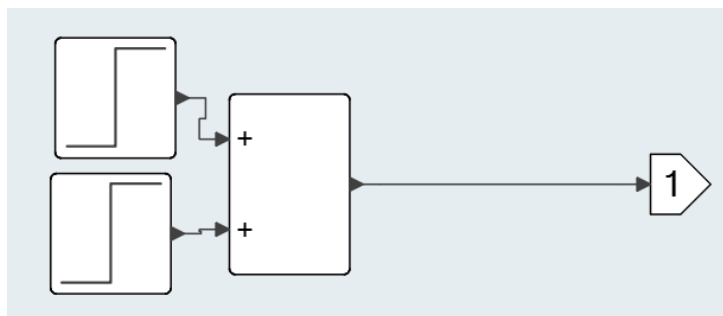


Figura 7: Super bloco da função impulso

A Figura 7 mostra a parte interna do super bloco utilizado para construir a função impulso. Tratam-se de dois degraus com amplitudes contrárias com um intervalo de tempo igual ao passo da simulação.

Os resultados da simulação, conforme esperado, são idênticos ao modelo baseado em componentes físicos. Estes resultados são mostrados na Figura 8.

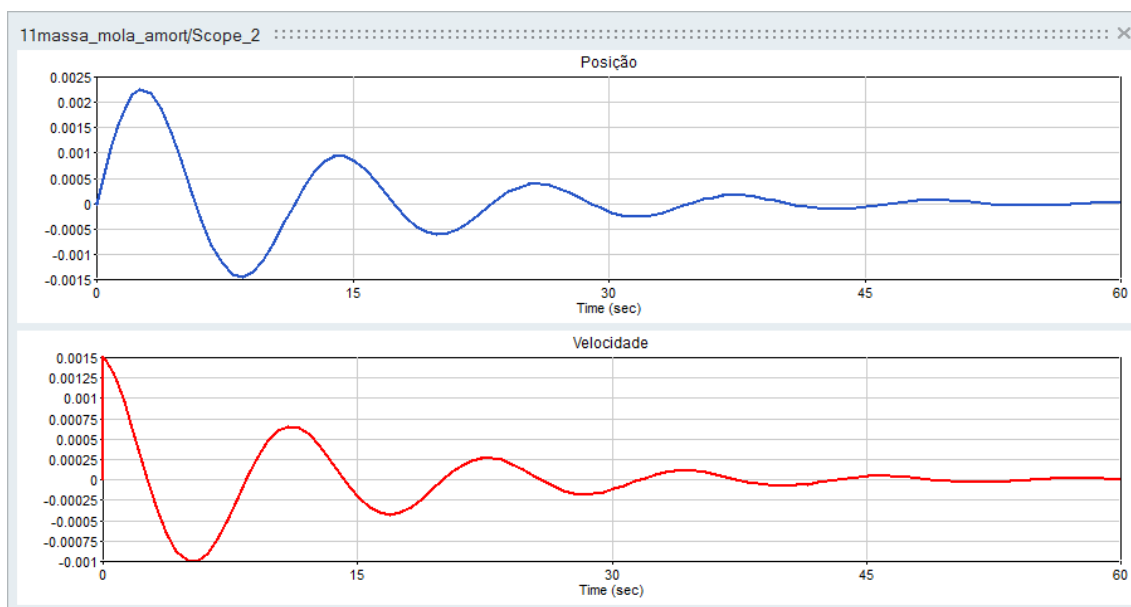


Figura 8: resultado da simulação da abordagem baseada em sinais

Os resultados também podem ser comparados utilizando as ferramentas do Activate, executando a simulação das duas abordagens simultaneamente, conforme Figura 9.

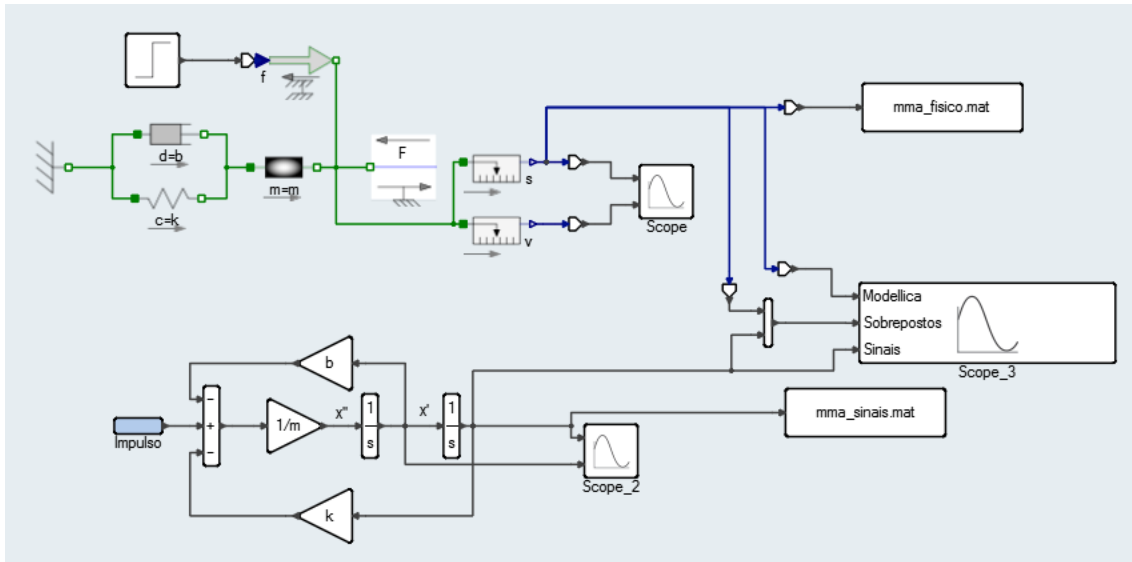


Figura 9: Diagrama completo com as duas abordagens no Activate

O resultado desta simulação pode ser visto na Figura 10, na qual se pode notar a sobreposição dos dois sinais.

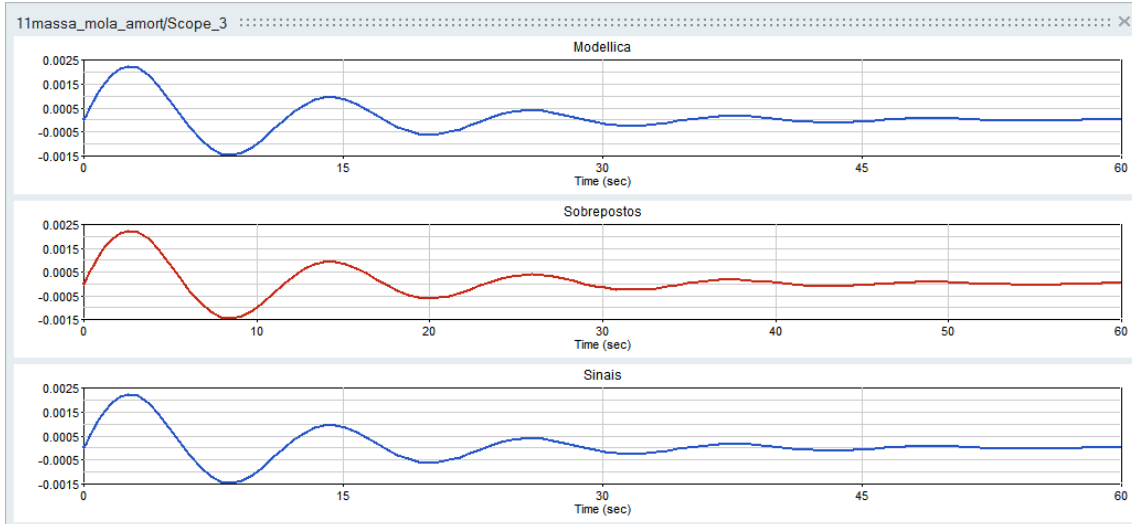


Figura 10: comparação dos sinais das duas abordagens distintas

Modelagem matemática

Por fim, também é possível verificar as soluções para este sistema utilizando o solidThinking Compose e uma abordagem matemática, utilizando equações diferenciais ordinárias e espaço de estados.

A equação

$$m\ddot{x} = f(t) - b\dot{x}(t) - kx(t)$$

pode ser transformada em espaço de estados, fazendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{posição} = x \\ x_2 &= \text{velocidade} = \dot{x} \end{aligned}$$

De forma que:

$$\dot{x}_1 = \frac{dx(t)}{dt} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{(f(t) - b\dot{x}(t) - kx(t))}{m} = \frac{(f - bx_2 - kx_1)}{m}$$

Esta função pode ser escrita no Compose, como mostrado na Figura 11.

```
function dx = sistmecanico(t,x,f,m,k,b)
    f = f*1e5*exp(-t*(1e8)); %emulando impulso
    x1pt = x(2);
    x2pt = (1/m)*(f - b*x(2) - k*x(1));
    dx = [x1pt;x2pt];
end
```

Figura 11: definição da função dos espaços de estado no Compose

Definida esta função, basta definir as constantes para serem iguais às utilizadas no Activate, inserir configurações opcionais para a função `ode45` e mostrar as respostas através do plot. O script completo pode ser visto na Figura 12.

```
5 function dx = sistmecanico(t,x,f,m,k,b)
6     f = f*1e5*exp(-t*(1e8)); %emulando impulso
7     x1pt = x(2);
8     x2pt = (1/m)*(f - b*x(2) - k*x(1));
9     dx = [x1pt;x2pt];
10 end
11
12 m = 10;
13 b = 1.5;
14 k = 3;
15 f=15;
16 tempo = 60; %tempo de simulação
17
18 options = odeset('RelTol',1.e-3,'AbsTol',[1.e-6,1.e-6]);
19 handle = @(t,x) sistmecanico(t,x,f,m,k,b);
20 [t,x] = ode45(handle, [0:0.1:tempo], [0;0], options);
21
22 pos = x(:,1); % Vc
23 plot(t, pos);
24 legend('Posição');
25 title('Sistema Massa-Mola-Amortecedor');
26
27 figure;
28
29 vel = x(:,2);
30 plot(t, vel, 'r');
31 legend('Velocidade');
32 title('Sistema Massa-Mola-Amortecedor');
```

Figura 12: Script para o problema massa-mola-amortecedor no Compose

Os resultados, conforme esperado, são condizentes com os resultados anteriormente encontrados e podem ser vistos na Figura 13.

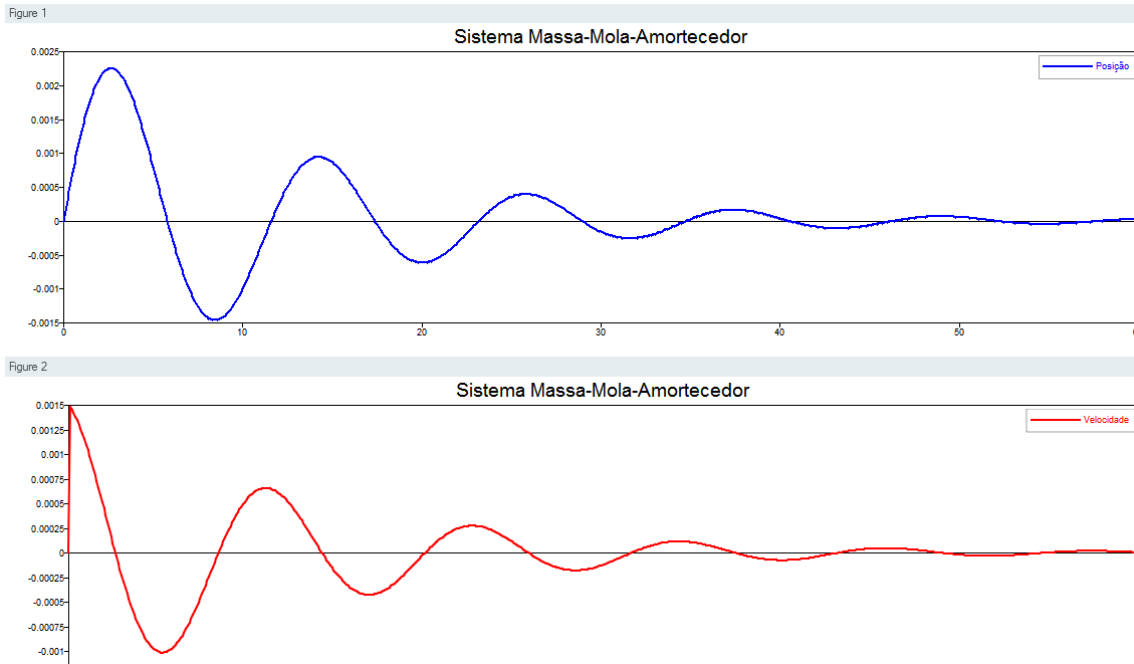


Figura 13: resultado da abordagem matemática

Comparando resultados

É possível ainda exportar as saídas geradas no Activate para serem exibidas no Compose (e vice-versa). Desta forma, podemos verificar os gráficos sobrepostos (Figura 14) e/ou próximos uns dos outros (Figura 15) para comparar os resultados.

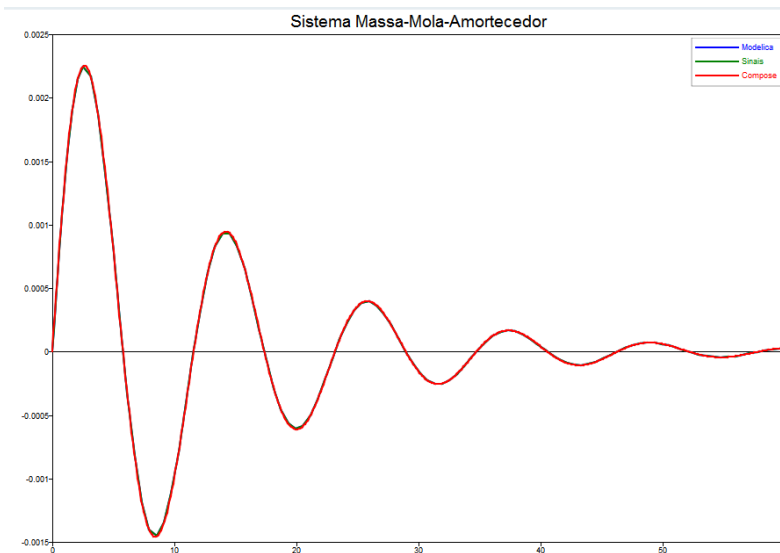


Figura 14: resultados sobrepostos

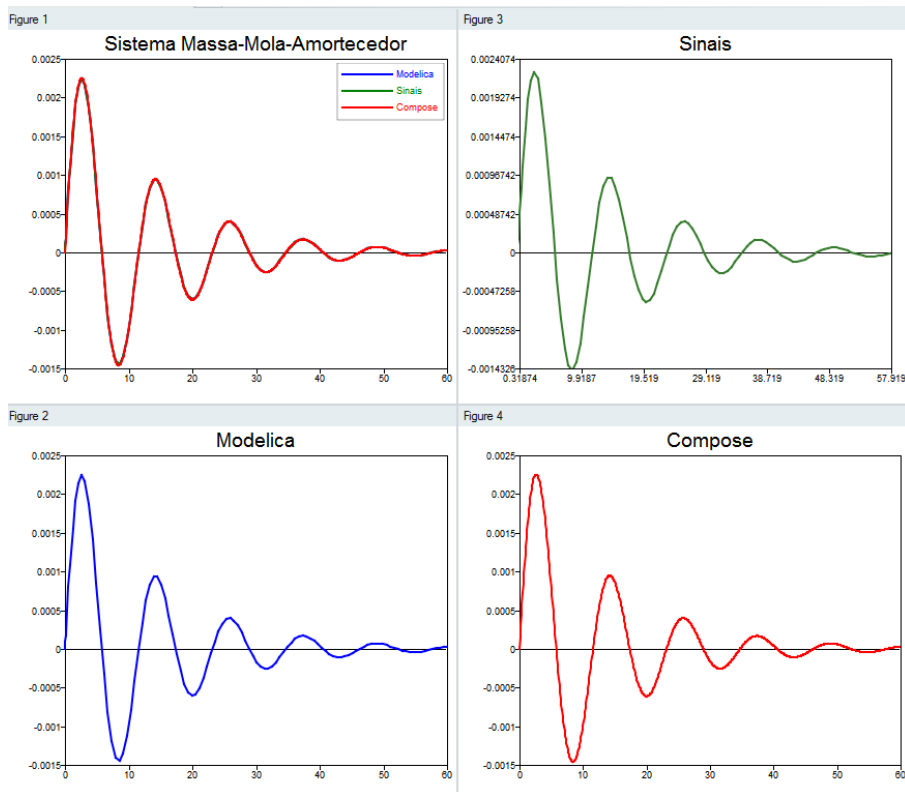


Figura 15: comparação das saídas dos diferentes modelos

Seja qual for a sua abordagem preferida, a suíte solidThinking tem uma solução adequada. Experimente gratuitamente [clikando aqui](#).