

Modelagem de um pêndulo não-linear usando blocos nativos do SolidThinking Activate

Modelagem do problema

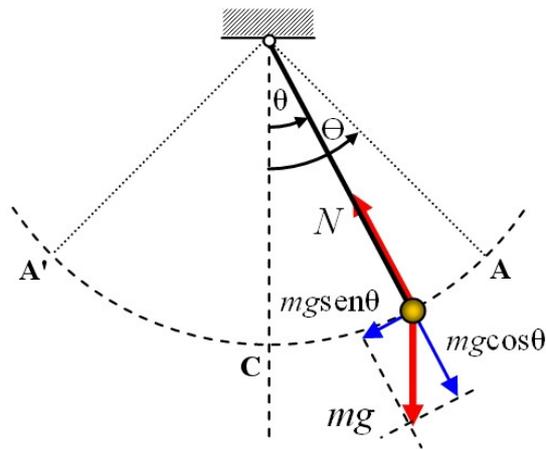


Figura 1: Esquema de um pêndulo

O pêndulo pode ser modelado a partir de uma equação diferencial oriunda do balanço de momentos em relação ao eixo ao redor do qual ele gira. Dessa forma, temos:

- a) Momento causado pelo peso:

$$M_P = -mgL \sin \theta$$

- b) Momento de inércia do pêndulo:

$$I = mL^2$$

- c) Equação de movimento:

$$I\ddot{\theta} = M_P + T_{ext}$$

As equações acima numeradas nos permitem desenvolver a equação do pêndulo, em sua forma não-linear, como sendo:

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin \theta = T_{ext}$$

Ou, de forma simplificada:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = \frac{T_{ext}}{mL^2}$$

Vale ressaltar que, nessas equações, T_{ext} representa um forçamento, ou seja, um momento imposto ao pêndulo em sua junta. A parcela do forçante, por sua vez, pode ser escrita em unidades de ângulo a partir da versão linearizada da equação acima para ângulos pequenos, segundo a qual $\sin \theta \cong \theta$. Assim, definimos um ângulo θ_T , reescrevendo a equação como:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = \frac{g}{L} \theta_T$$

Para pequenos ângulos, θ_T representa o ângulo de equilíbrio a ser imposto ao sistema. Essa aproximação se torna pior conforme o ângulo θ_T cresce, devido a não-linearidade da equação.

Além da equação acima, duas condições iniciais são necessárias para fechar o problema, a saber:

$$\theta(t = 0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$$

Construção do Modelo no SolidThinking Activate

O modelo do pêndulo não-linear pode ser visto abaixo

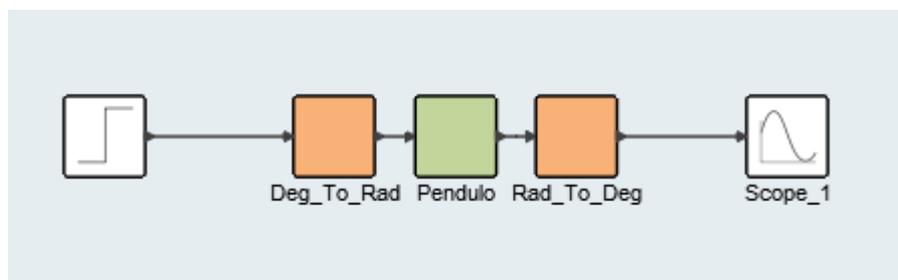


Figura 2: Modelo do pêndulo feito no Activate

Note que a lógica do pêndulo é inteiramente implementada dentro do superbloco verde *Pêndulo*, e que os superblocos laranja *Deg_To_Rad* e *Rad_To_Deg* tem como função converter o ângulo de graus para radianos e de radianos para graus, respectivamente. Vale ressaltar que a equação deduzida demanda o uso do ângulo em radianos.

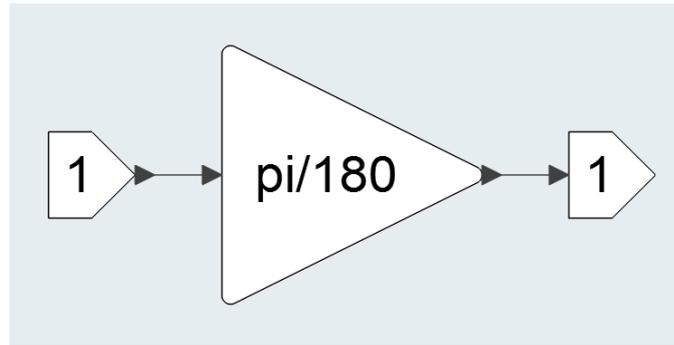


Figura 3: Lógica contida no superbloco *Deg_To_Rad*

A construção lógica interna do superbloco *Pêndulo* pode ser vista abaixo:

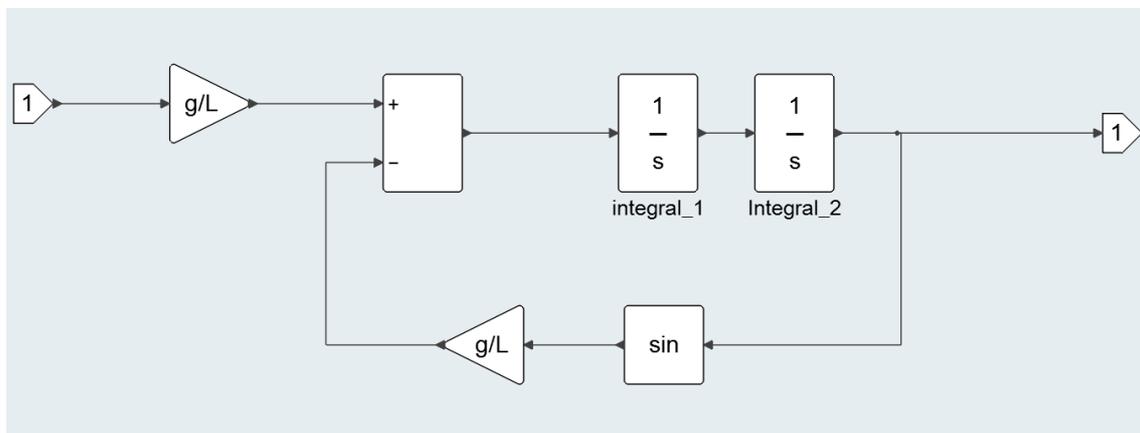


Figura 4: Lógica contida no superbloco *Pendulo*

Nos integradores é onde definimos os parâmetros de condições iniciais do problema. Como o integrador 1 é o responsável por integrar a aceleração em velocidade e o integrador 2 é o responsável por integrar a velocidade em deslocamento, a condição inicial de velocidade deve ser dada ao integrador 1, e a de posição, ao 2.

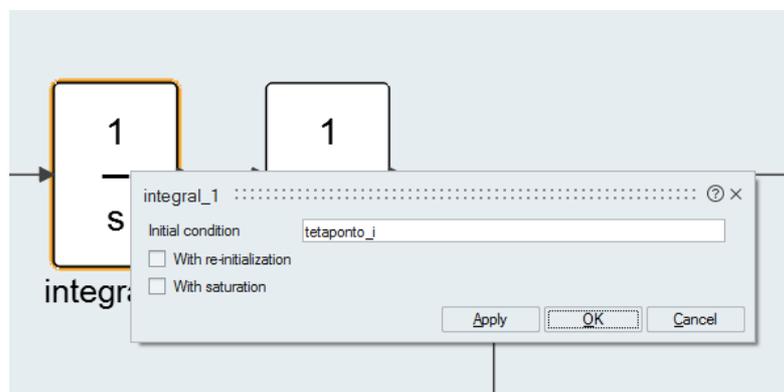


Figura 5: Imposição de condição inicial de velocidade angular

Já o termo forçante será dado por um degrau de amplitude θ_{step} que inicia em um instante t_{step} .

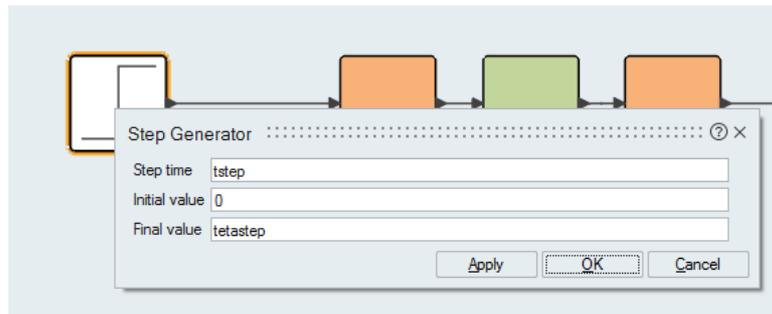


Figura 6: Imposição de valores para os parâmetros do degrau

Os parâmetros relevantes a simulação (condições iniciais, amplitude do degrau, g e L), por simplicidade, foram definidos como variáveis no diagrama global do pêndulo, com valores como os abaixo:

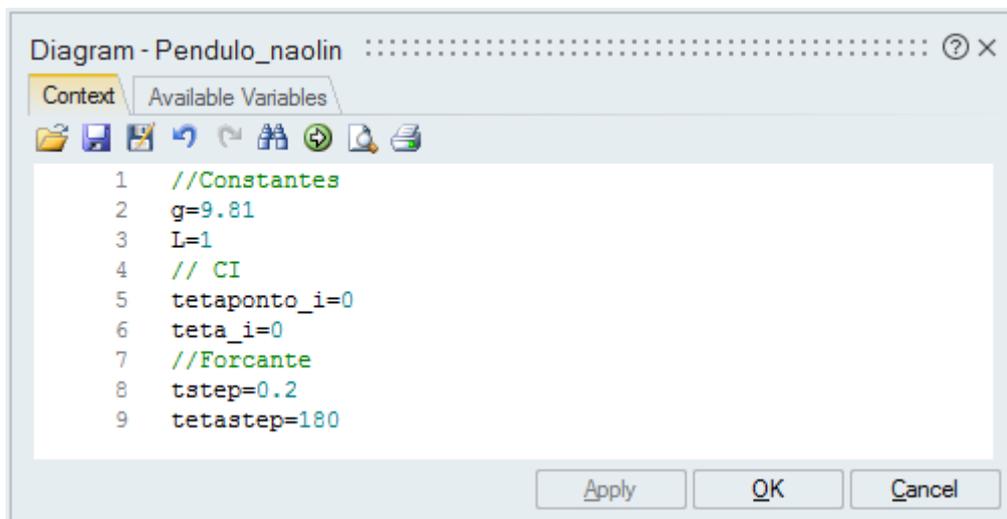


Figura 7: Constantes relevantes para a simulação

Resultados gerados

Condição inicial não-nula de posição

Para a condição inicial não-nula de posição, os seguintes valores foram fornecidos ao programa:

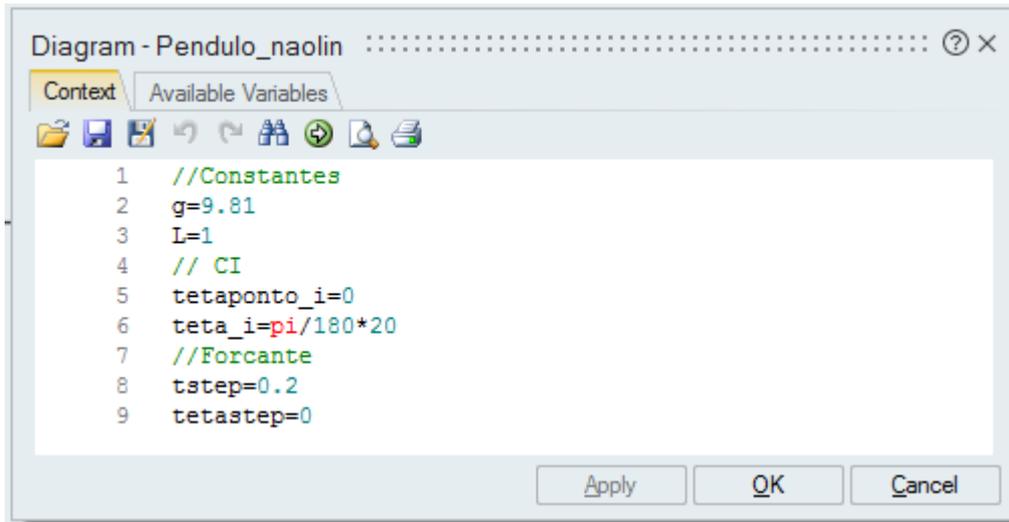


Figura 8: Configuração da simulação para condição de posição não-nula

O resultado obtido pode ser visto abaixo:

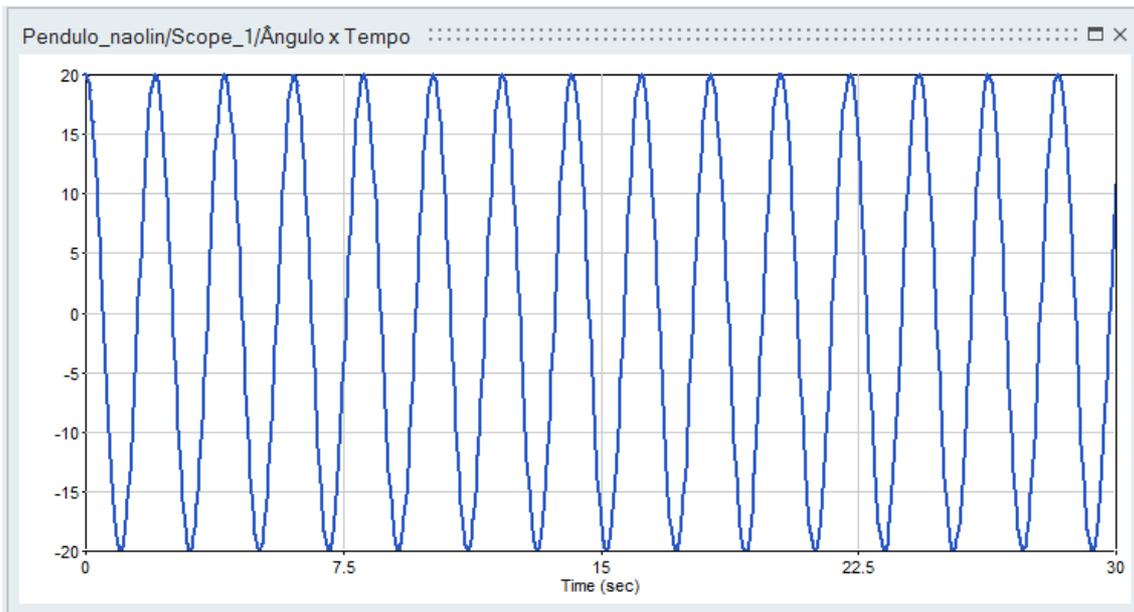


Figura 9: Resultado para posição inicial igual a 20°

Como esperado, para um ângulo abaixo de 180° (no caso, 20°), o pêndulo ficou oscilando ao redor do zero com amplitude fixa. Caso o ângulo seja maior que 180° (por exemplo, 340°), é esperado que o pêndulo oscile ao redor de uma posição múltipla de 360°. Isso se verifica na simulação abaixo:

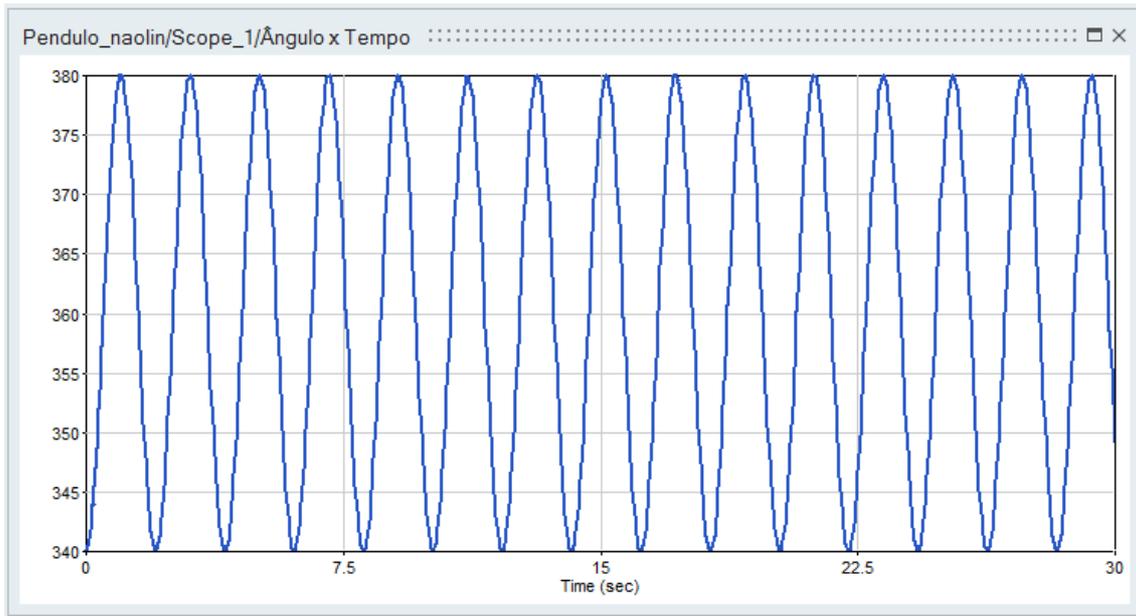
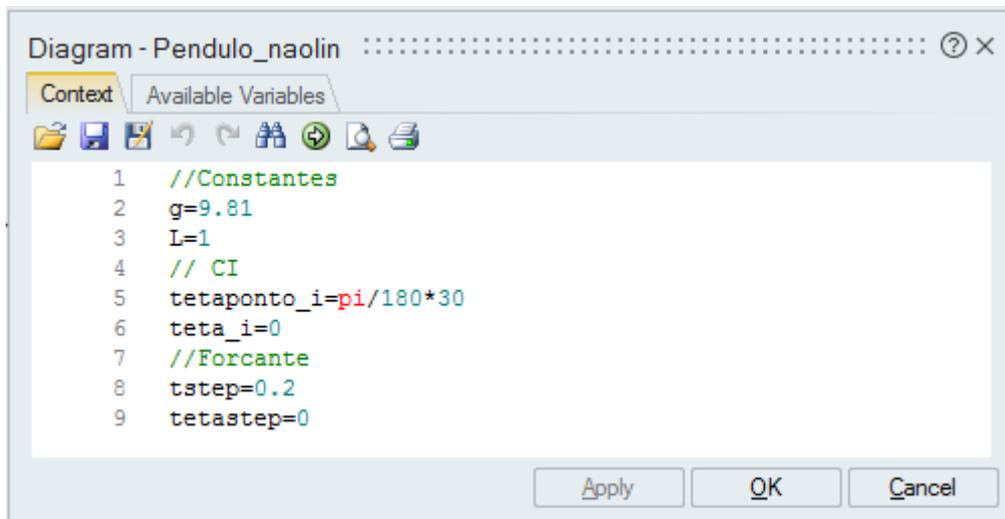


Figura 10: Resultado para posição inicial igual a 340°

Condição inicial não-nula de velocidade

Para a condição inicial não-nula de velocidade, as condições da simulação podem ser vistas abaixo:



```

1 //Constantes
2 g=9.81
3 L=1
4 // CI
5 tetaponto_i=pi/180*30
6 teta_i=0
7 //Forçante
8 tstep=0.2
9 tetastep=0
    
```

Figura 11: Configuração para simulação de condição inicial de velocidade não-nula

E o resultado obtido pode ser visto abaixo:

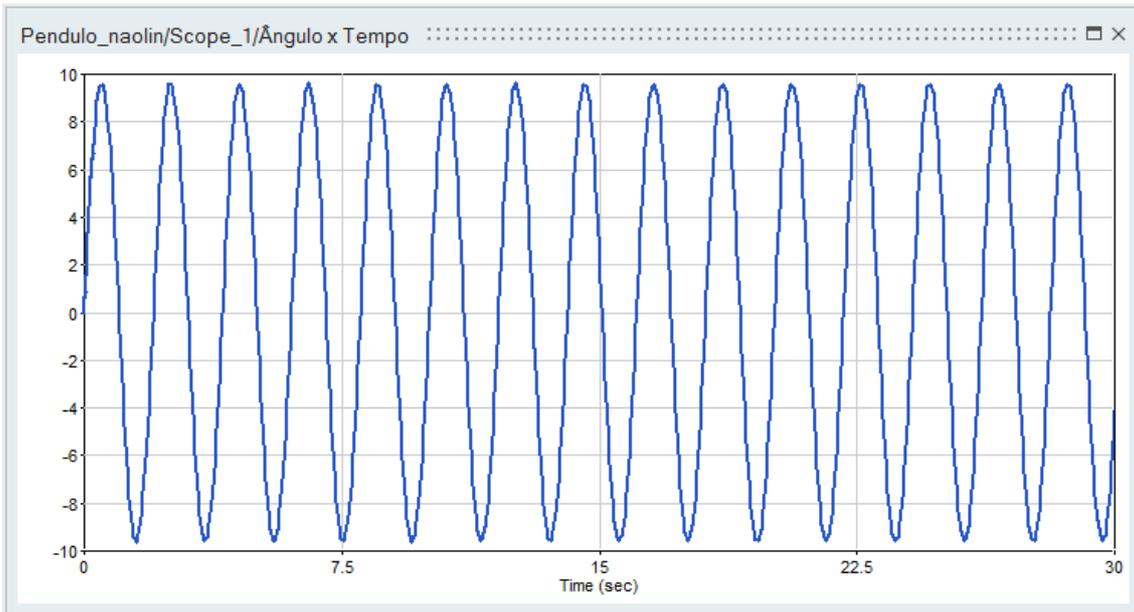


Figura 12: Resultados para velocidade inicial de $30^\circ/s$

Para velocidades pequenas (no caso, $30^\circ/s$), é esperado que o comportamento oscilatório. Entretanto, caso a velocidade seja alta o suficiente para que o pêndulo complete uma volta inteira, chegando ao topo de sua trajetória com velocidade não-nula, o problema se torna instável. O resultado para uma velocidade alta (no caso, $360^\circ/s$) pode ser visto abaixo:

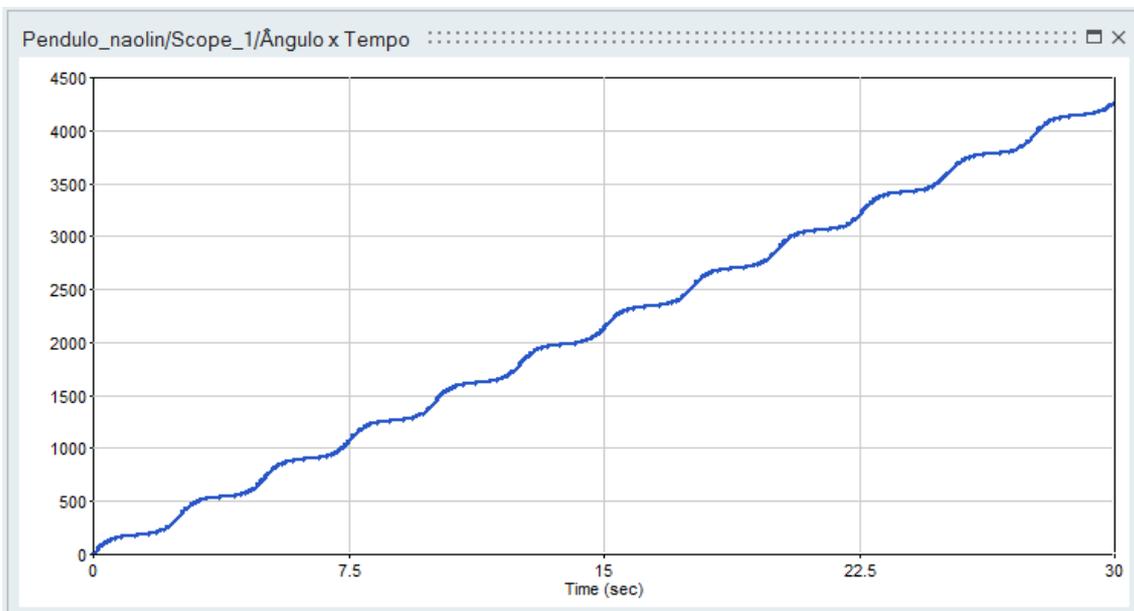


Figura 13: Resultados para velocidade inicial de $360^\circ/s$

Condições iniciais nulas com forçante

Para condições iniciais nulas com forçante, as condições de simulação podem ser vistas abaixo:

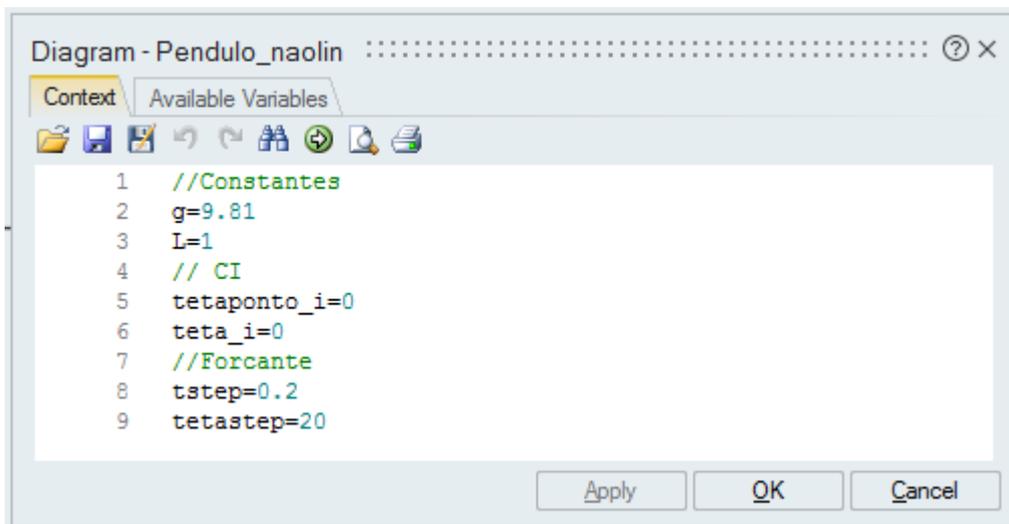


Figura 14: Configuração para simulação de condições iniciais nulas com forçante

E o resultado obtido pode ser visto abaixo:

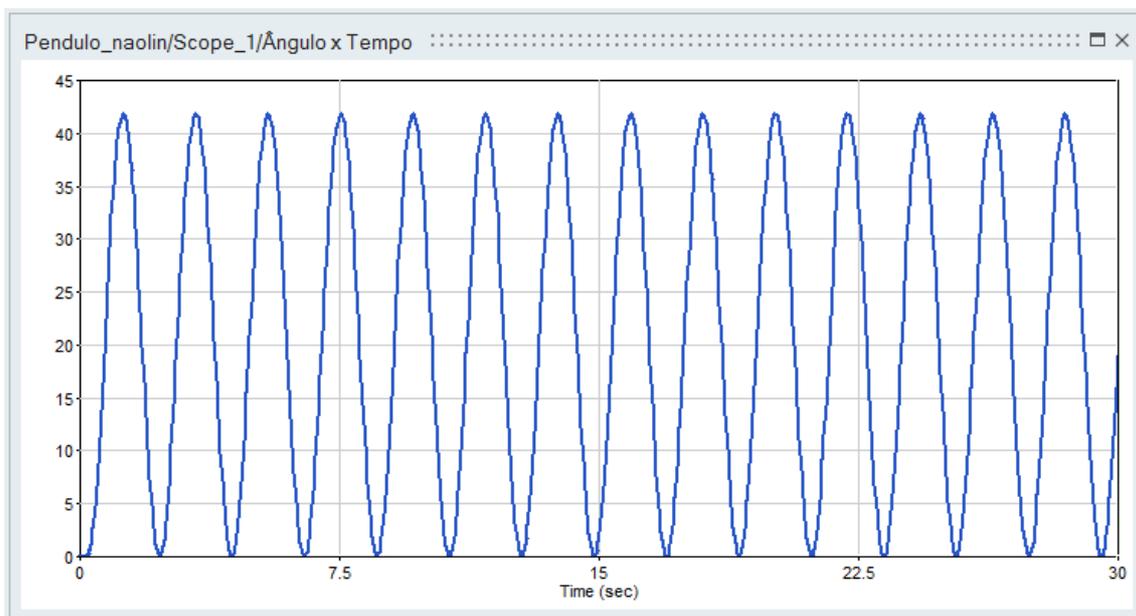


Figura 15: Resultado para $\theta_T = 20^\circ$

Como podemos ver, para um forçante equivalente a um pequeno ângulo (20° , acima), o pêndulo oscila ao redor da posição de equilíbrio imposta pelo forçante. Entretanto, de forma similar a velocidade, caso o forçante seja suficiente para permitir que o pêndulo atinja sua posição de máximo com velocidade não-nula, o modelo torna-se instável. Para o modelo aqui apresentado, esse

comportamento ocorre para valores de θ_T superiores a 41° , e a curva apresenta a forma abaixo, para $\theta_T = 42^\circ$:

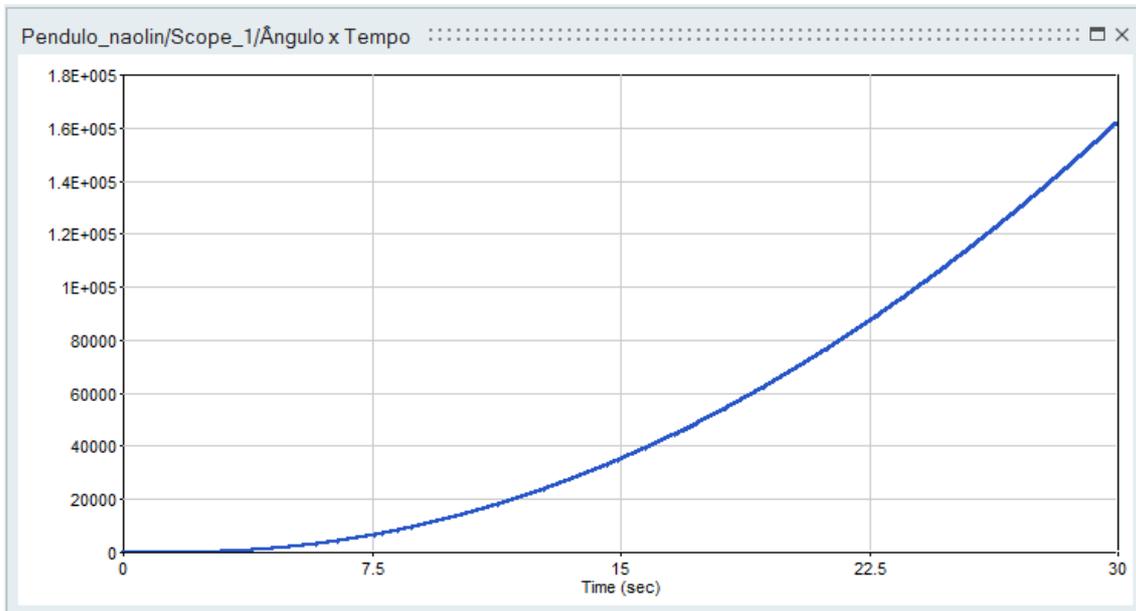


Figura 16: Resultado para $\theta_T = 42^\circ$